BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА r – ЧЕЗАРО В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_s $(1 \le s < \infty)$

А.М.АХМЕДОВ, И.А.МАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

В данной работе найдены спектры операторов r – Чезаро в пространстве числовых последовательностей

$$\ell_s = \left\{ x = (x_k): \sum_k |x_k|^s < \infty \right\} (1 \le s < \infty).$$

Определены точечные, непрерывные и остаточные части спектра этих операторов. Эти вопросы изучены в пространстве ℓ_2 *Ралли, а в пространстве* c_0 *Дж. Джошкуном. В случае оператора Чезаро* C_1 *указанные вопросы исследованы многими авторами в различных пространствах последовательностей.*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть T – линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство E в себя. Для оператора T с областью определения $D(T)$ и областью значений $R(T)$, содержащееся в E, можно задать на $D(T)$ оператор

$$T_\lambda = T - \lambda I,$$

где λ – произвольное комплексное число, I – единичный оператор в D(T). Для описания T основную роль играет распределение тех значений λ, при которых для T_λ существует обратный оператор и свойства этого обратного оператора.

Значения λ, при которых для T_λ существует ограниченный обратный

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$$

с областью определения, плотной в E, образуют резольвентное множество $\rho(T,E)$ оператора T. $R_\lambda(T)$ называется резольвентой оператора T. Множество ¢$\backslash \rho(T,E)$ называется спектром оператора T и обозначается через $\sigma(T,E)$, здесь ¢ - комплексная плоскость.

Значения λ, при которых для T_λ существует не ограниченный обратный с областью определения, плотной в E, образуют непрерывный спектр $\sigma_c(T,E)$. Значения λ, при которых для T_λ существует обратный с областью определения, не плотной в E, образуют остаточный спектр $\sigma_r(T,E)$. Значения λ, при которых для T_λ не существует обратный, образуют точечный спектр

$\sigma_p(T,E)$.

Легко видеть, что множества $\rho(T,E)$, $\sigma_c(T,E)$, $\sigma_r(T,E)$ и $\sigma_p(T,E)$ попарно не пересекаются и объединение их представляет собой всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Обозначим через ImT и KerT, соответственно, область значения и ядро оператора T:

$$\operatorname{Im}T = \{y : y = Tx, \quad x \in E\},$$
$$KerT = \{x : \quad Tx = 0\}.$$

Пусть C_r – оператор r – Чезаро. Известно, что этот оператор определяется бесконечной матрицей вида

$$C_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2^r} & \frac{1}{2^r} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3^r} & \frac{1}{3^r} & \frac{1}{3^r} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где r – действительное число, C_1 является оператором Чезаро. Будем рассматривать случай, когда $r > 1$.

Обозначим через ℓ_s $(1 \le s < \infty)$ – банахово пространство последовательностей $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, для которых $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^s < \infty$.

Известно, что

1) $C_r : c_0 \to c_0$ линейный компактный оператор [1], где c_0 – пространство сходящиеся к нулю последовательностей.

2) $C_r^* : \ell_q \to \ell_q$ $\left(1 < s < \infty, \frac{1}{s} + \frac{1}{q} = 1\right)$ и определяется матрицей

$$C_r^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^r} & \frac{1}{3^r} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2^r} & \frac{1}{3^r} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^r} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где C_r^* оператор, сопряженный C_r.

В работе [1, стр. 208] доказана следующая

Лемма 1. $\sigma_p(C_r, c_0) = \left\{\frac{1}{k^r}, k = 1,2, \cdots\right\}$.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА r – ЧЕЗАРО В ПРОСТРАНСТВЕ $\ell_s \ (1 \le s < \infty)$

Ниже будем исследовать множества $\sigma_p(C_r, \ell_s)$, $\sigma_c(C_r, \ell_s)$ и $\sigma_r(C_r, \ell_s)$ для оператора C_r.

Теорема 1. $\sigma_p(C_r, \ell_s) = \left\{ \frac{1}{k^r}, \ k = 1, 2, \cdots \right\} \ (1 \le s < \infty)$.

Доказательство. Из $\ell_s \subset c_0$ следует, что
$\sigma_p(C_r, \ell_s) \subset \sigma_p(C_r, c_0)$.

Следовательно, из вышеуказанной леммы 1 получаем

$$\sigma_p(C_r, \ell_s) \subset \left\{ \frac{1}{k^r}, \ k = 1, 2, \cdots \right\}. \qquad (1)$$

Теперь пусть

$$\lambda \in \left\{ \frac{1}{k^r}, \ k = 1, 2, \cdots \right\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$C_r x = \lambda x, \qquad x \ne 0, \qquad x = (x_0, \, x_1, \, \cdots) \in \ell_s.$$

Оно эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned}
&x_0 = \lambda x_0, \\
&\frac{1}{2^r} x_0 + \frac{1}{2^r} x_1 = \lambda x_1, \\
&\frac{1}{3^r} x_0 + \frac{1}{3^r} x_1 + \frac{1}{3^r} x_2 = \lambda x_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{1}{(n+1)^r} x_0 + \frac{1}{(n+1)^r} x_1 + \cdots + \frac{1}{(n+1)^r} x_n = \lambda x_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

если

$$\lambda = \frac{1}{(k+1)^r},$$

то

$$x_n = \prod_{m=k+1}^{n} \left(\frac{\lambda m^r}{\lambda (m+1)^r - 1} \right) x_k, \qquad (2)$$

где k - наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям $x_k \ne 0$ и $k \le n-1$.

Покажем, что элемент $x = (x_n)$, определенный в (2), принадлежит пространству $\ell_s \ (1 \le s < \infty)$. Для этого применим признак Раабе. Предположим, что n – достаточно большой номер.

Тогда

$$\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right|^s=\left|\frac{\lambda(n+2)^r-1}{\lambda(n+1)^r}\right|^s=\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^r-\frac{1}{\lambda(n+1)^r}\right|^s=$$

$$=\left|1+\frac{r}{n+1}+\frac{A_n}{(n+1)^2}-\frac{1}{\lambda(n+1)^r}\right|^s=$$

$$=\left|1+\frac{rs}{n+1}+\frac{B_n}{(n+1)^\alpha}\right| \qquad (\alpha>1),$$

где A_n и B_n ограниченные числовые последовательности.
Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right|^s-1\right)n=\lim_{n\to\infty}\left(\left|1+\frac{rs}{n+1}+\frac{B_n}{(n+1)^\alpha}\right|-1\right)n=rs.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ принадлежит в ℓ_s $(1\le s<\infty)$. Поэтому

$$\left\{\frac{1}{k^r},\, k=1,\ 2,\cdots\right\}\subset\ \sigma_p(C_r,\,\ell_s). \qquad (3)$$

Из (1) и (3) получаем:

$$\sigma_p(C_r,\,\ell_s)=\left\{\frac{1}{k^r},\ k=1,2,\cdots\right\},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. C_r – компактный оператор в ℓ_s $(1\le s<\infty)$.

Доказательство. Так как $\ell_s\subset c_0$, то утверждение леммы следует из свойства 1) оператора C_r.

Теорема 2. $\sigma(C_r,\,\ell_s)=\left\{\frac{1}{k^r},\ k=1,2,\cdots\right\}\cup\{0\} \quad (1\le s<\infty)$.

Доказательство. По лемме 2 C_r – компактный оператор в ℓ_s. Известно, что каждая точка $\lambda\ne 0$ спектра компактного оператора является собственным значением, следовательно, в силу теоремы 1, $0\notin\sigma_p(C_r,\ell_s)$. Так как спектр оператора в банаховом пространстве является замкнутым множеством, то $0\in\sigma(C_r,\ell_s)$.

Следовательно,

$$\sigma(C_r,\,\ell_s)=\sigma_p(C_r,\,\ell_s)\cup\{0\}=\left\{\frac{1}{k^r},\ k=1,2,\cdots\right\}\cup\{0\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $1<s<\infty$. Тогда

$$\sigma_c(C_r,\ell_s)=\{0\}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$C_r^* f=0, \quad f=(f_0,\,f_1,\cdots)\in\ell_q,$$

которое равносильно системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
f_0 + \frac{1}{2^r} f_1 + \frac{1}{3^r} f_2 + \cdots &= 0, \\
\frac{1}{2^r} f_1 + \frac{1}{3^r} f_2 + \cdots &= 0, \\
\frac{1}{3^r} f_2 + \cdots &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&
\end{aligned}
$$

Отсюда имеем:

$$f = (f_0, f_1, f_2, \cdots) = (0, 0, 0, \cdots) = 0.$$

Следовательно, $KerC_r^* = \{0\}$. Область значения оператора C_r плотна в ℓ_s $(1 < s < \infty)$:

$$\overline{\operatorname{Im} C_r} = \ell_s.$$

Значить,

$$0 \in \sigma_c(C_r, \ell_s).$$

Из теорем 1 и 2 следует, что

$$\sigma_c(C_r, \ell_s) = \{0\}.$$

Теорема доказана.

Из теорем 1-3 следует следующая

Теорем 4. Пусть $1 < s < \infty$. Тогда

$$\sigma_r(C_r, \ell_s) = \varnothing.$$

Итак, подытожив полученные результаты, сформулируем основную теорему.

Теорема 5. *a*) $\sigma(C_r, \ell_s) = \left\{\frac{1}{k^r},\ k = 1, 2, \cdots\right\} \cup \{0\}$ $(1 \le s < \infty)$,

b) $\sigma_p(C_r, \ell_s) = \left\{\frac{1}{k^r},\ k = 1, 2, \cdots\right\}$ $(1 \le s < \infty)$,

c) $\sigma_c(C_r, \ell_s) = \{0\}$ $(1 < s < \infty)$,

d) $\sigma_r(C_r, \ell_s) = \varnothing$ $(1 < s < \infty)$.

Замечание. Отметим, что оператор r – Чезаро впервые был введен Ралли [2] и им полностью изучен спектр этого оператора в пространстве ℓ_2. Эти же вопросы были изучены Дж. Джошкуном в [1] в случае пространства c_0.

Спектр оператора Чезаро C_1 были изучены многими авторами в различных пространствах последовательностей (см., напр., [3]-[6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cafer Coşkun, The spectra and fine spectra for p – Cesaro operators. Tr. J. of Mathematics 21 (1997), 207 -212.
2. Rhaly JR H.C., p – Cesaro Matrices, Houston J. Math., 15 (1989), 137 – 146.

3. Manuel Gonzalez, The fine spectrum of the Cesaro operator in $\ell_p (1 < p < \infty)$, Arch. Math., 44 (1985), 355 – 358.
4. J. B. Reade, On the spectrum of the Cesaro operator, Bull. London Math. Soc. 17 (1985), 263 – 267.
5. M. Yildirim, On the spectrum and fine spectrum of the Compact Rhally operators, Indian J.Pure Appl. Math. 27 (8) (1996), 779 – 784.
6. A.M.Akhmedov and F.Başar, On spectrum of the Cesaro operator, Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb., 19 (2003), 3 – 8.

r – ÇEZARO OPERATORUNUN $\ell_s \ (1 \le s < \infty)$ FƏZASINDA SPEKTRİ HAQQINDA

Ə.M.ƏHMƏDOV, İ.Ə.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Bu işdə r – Çezaro operatorunun

$$\ell_s = \left\{ x = (x_k): \sum_k |x_k|^s < \infty \right\} (1 \le s < \infty)$$

ədədi ardıcıllıqlar fəzasında spektri öyrənilir. Bu operatorun spektrinin nöqtəvi, kəsilməz və qalıq hissələri təyin edilir. Həmin məsələlər ℓ_2 fəzasında Ralli, c_0 fəzasında C.Coşkun tərəfindən öyrənilmişdir. C_1 Çezaro operatoru halında baxılan məsələlər müxtəlif ardıcıllıqlar fəzalarında bir çox müəlliflər tərəfindən tədqiq olunmuşdur.

ON SPECTRUM OF r – CESARO OPERATOR IN THE SPACE $\ell_s \ (1 \le s < \infty)$

A.M.AKHMEDOV, I.A.MAMMADOV

SUMMARY

In this work is studied the spectrum of the r – Cesaro operator in the sequences space

$$\ell_s = \left\{ x = (x_k): \sum_k |x_k|^s < \infty \right\} (1 \le s < \infty).$$

The point, continuous and residual parts of the spectrum of these operators are defined. These questions are studied in ℓ_2 by Rhally, in c_0 by C.Coşkun. In the case of Cesaro operator C_1 considered problems are investigated by many authors in different spaces of sequences.